# משפט

פונקציה רציפה על קטע תהיה חח"ע אם ורק אם היא עולה או יורדת.

## הערה

המשפט אינו נכון אם הפונ' אינה רציפה.

### דוגמה

#### תרגיל

1. הוכח שf רציפה ב אם ורק אם או .
2. מצא פונקציה כזאת שאינה רציפה בשום נקודה של .

## הוכחה

אם f עולה או יורדת בקטע, ברור שהיא חח"ע שם.  
בכיוון השני, נניח שf הינה חח"ע בקטע I אבל אינה עולה או יורדת שם. אזי קיימות נקודות בקטע I כך שאו או , כי אחרת או לכל ואז f הינה עולה או לכל ואז f יורדת בI.

אם , קח   
. ע"פ משפט ערך הביניים קיים כך ש. גם ע"פ אותו משפט קיים כך ש. ברור ש. מכאן f אינה חח"ע, סתירה.

# דוגמה

נגדיר . הפונקציה היא חח"ע וגם על. הפונ' . הפונקציה הינה חח"ע אבל לא על.

# משפט

תהי f פונקציה רציפה עולה המוגדרת על , . אזי

## הוכחה

כיוון שf עולה מתקיים עבור כל ש. ע"פ משפט ערך הביניים f מקבלת ב כל ערך בין ו

# משפט

תהי f פונקציה רציפה עולה המוגדרת על . אזי התמונה הינה קטע פתוח (יכול להיות לא חסומה)

## הוכחה

קח כך ש. נסמן . אזי   
*באשר*

# משפט

תהי f פונקציה רציפה העולה ב. אזי הפונקציה ההפוכה המוגדרת על רציפה ועולה אף היא בתחום שלה.

## הוכחה

העובדה ש עולה אם f עולה טריוויאלית. נשאר להוכיח ש רציפה ב. נניח ש וש. צ"ל . נגיד ש ().  
טענה: . נניח שלא, אזי ז"א שקיים ו כך ש לכל k. לסדרה יש תת סדרה מתכנסת , . ברור ש וגם ש שכן ומכאן וזה בסתירה לכך שf חח"ע.

# משפט

אותו המשפט עבור קטע פתוח .

## הוכחה

ניקח , וניישם את המשפט הקודם לקטעים , באשר .

### תרגיל – סיים את ההוכחה

#### רמז

אם קיים N כך ש

# דוגמאות



הפונקציה באשר

# נניח ש.

## רוצים להגדיר כאשר

נגדיר להיות השורש החיובי היחיד של המשוואה . נתבונן ב בקטע .   
*הפונקציה f עולה. קיים אך ורק מספר חיובי אחד(בין 1 לבין a) שהוא השורש למשוואה.*

## 

כללי החזקות הם . טענות:

## אם נגדיר

אפשר לבדוק שהכללים נשמרים.

הפונקציה באשר ו

# טענה

פונקציה זו(המוגדרת עבור ) הינה עולה. מספיק להוכיח שאם אזי   
[כי אם , , אזי ואם , אזי ולכן ואז ]

נניח ש, אזי ולכן

עכשיו נקבע . כיוון ש הינה פונקציה עולה המוגדרת על קיימים הגבולות

# משפט

## למה

לכל קיים כך שאם ו אזי .

### הוכחה

ידוע לנו ש כאשר . נקח עבור N מספיק גדול.

## הוכחה

יהי . נגדיר . נבחר ב כך שאם אזי . עכשיו, אם כך ש ו, אזי ולכן